2024 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

國中組　成果報告表單

題目名稱： 我是遊戲王:「搶數」的必勝策略

一、摘要

「**搶數**」是一個歷史十分悠久的邏輯思維遊戲，許多有名的遊戲都是基於這個概念，例如: 搶 15、搶 20、搶 23，甚至，不久前風靡一時的滅鼠先鋒也是。

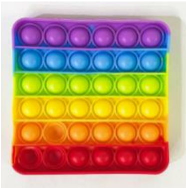
舉其中一種遊戲「搶 20」為例，其規則如下；

有 1, 2, 3, 4, 5, 五個數，遊戲者輪流從 1~5 中取出一個數，不可以取前一輪對手所取之數 (如甲選了 1, 乙接著便不能選擇 1)，兩人輪流取數將兩人所取之數累加起來，當累加至剛剛好正整數 20 者，則贏得遊戲。

超過 20 的就算輸。必須剛剛好。

此研究就是找出在「搶數」的遊戲中獲得勝利的方法。同時，也打破人們以為遊戲是公平的想法，對於懂數學的人而言，勝負在遊戲的一開始就已經確定了。

二、探究題目與動機



小學時看到同學們帶來了滅鼠先鋒，總是很興奮且手癢想玩一把，遊戲的過程很刺激，我總是默默祈禱可以贏得遊戲，結果是差強人意，偶而贏偶而輸，當時我一直以為輸贏是掌握在幸運女神的手中。

為了更加親近滅鼠先鋒，我請求媽媽買了一個給我，以便我隨時想玩就玩。

隨著遊戲次數愈來愈多，加上年齡以及知識的增長，看待事情不在只著眼於表象，更多了一些審判，對於滅鼠先鋒，有一個想法升起在我的心裡: 遊戲中似乎存在一些潛藏的規則，是否有讓先手或後手勝利的條件或策略呢? 為了解開這個謎團，我決定展開研究。

三、探究目的與假設

首先，利用 Excel 模擬了兩個簡單的搶數遊戲。從圖(一)和圖(二)可以發現，在相同的條件下，圖一甲乙各有勝局，但圖二卻只有乙勝。

因此，我們懷疑這看似是一場邏輯思維的運算比賽，但勝負其實在遊戲的條件定下來的那一刻就已經確立，遊戲並不是我們以為的那般公平。

我們假設搶數遊戲有必勝的技巧。這個研究就是要找出什麼條件下，哪一方會獲勝，其獲利的技巧又為何。

實例 數字	實例 目標		#1 甲	#2 乙	#3 甲	#4 乙	結果
5	6	取數	1	5			乙勝
		餘數	5	0			
5	6	取數	2	4			乙勝
		餘數	4	0			
5	6	取數	3	2	1		甲勝
		餘數	3	1	0		
5	6	取數	4	2			乙勝
		餘數	2	0			
5	6	取數	5	1			乙勝
		餘數	1	0			

(圖一)

實例 數字	實例 目標		#1 甲	#2 乙	#3 甲	#4 乙	結果
6	7	取數	1	6			乙勝
		餘數	6	0			
6	7	取數	2	5			乙勝
		餘數	5	0			
6	7	取數	3	4			乙勝
		餘數	4	0			
6	7	取數	4	3			乙勝
		餘數	3	0			
6	7	取數	5	2			乙勝
		餘數	2	0			
6	7	取數	6	1			乙勝
		餘數	1	0			

(圖二)

四、探究方法與驗證步驟

(1) 我們這次要探討的搶數遊戲，其規則是: 甲乙兩人輪流從 1~N 個數字中取 1 數字，兩人所取之數累加，誰先達到目標數 T，贏得遊戲。但有兩個禁令，(一)不能重複前一手剛取之數，也就是說同樣的數不能連續兩次 (二)累加的數不能超過目標數，超過就算輸。舉個簡單的例子，當餘為 2 的情況下，甲取 1，此時餘數為 1，但乙不能再取 1，於是遊戲結束，乙輸了比賽。

(2) 我們利用 Excel 做了模擬對賽的模型，先手為甲，後手為乙。

(3) 假設甲、乙都是理性的人，不會使用拖拉戰術延長對戰回合，每一步都是最好的步。因為篇幅限制，我們將只能節取驗證的最後結果。

(4) 我們設計不同的 N 值和 T 值做大量實際對賽的模擬，之後分析這些資料並推導出勝利的技巧與條件。

(5) 下列是我們設定的代碼定義以及模擬對賽的數據:

代碼	代碼意義
N	可選擇的數字個數。例: 參賽者可由1~5的數字中取一個數, 此時 N=5
T	遊戲的目標達成數。例:累加數達到20者為獲勝者, 此時 T=20
R	T ÷ (N+1) 的餘數。例 N=5, T=20, 20÷(5+1)=3…2, 此時 R=2
R'	T ÷ (N+2) 的餘數。例 N=5, T=20, 20÷(5+2)=2…6, 此時 R'=6
X	(N+1) 做質因數分解後 2 的指數。例: N=5, N+1=6=2×3, 此時 X=1

模型#1　T=(N+1) & 2(N+1)　R=0

實例						#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	結果
N	T	X	R	R'		甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	
5	6	1	0	6	取數	3	2	1										甲勝
	1X				餘數	3	1	0										
5	12	1	0	5	取數	5	1	3	2	1								甲勝
	2X				餘數	7	6	3	1	0								
6	7	0	0	7	取數	6	1											乙勝
	1X				餘數	1	0											
6	14	0	0	6	取數	2	5	3	4									乙勝
	2X				餘數	12	7	4	0									
7	8	3	0	8	取數	4	2	1										甲勝
	1X				餘數	4	2	1										
7	16	3	0	7	取數	7	1	4	2	1								甲勝
	2X				餘數	9	8	4	2	1								
11	12	2	0	12	取數	6	3	2	1									乙勝
	1X				餘數	6	3	1	0									
11	24	2	0	11	取數	11	1	6	3	2	1							乙勝
	2X				餘數	13	12	6	3	1	0							
15	16	4	0	16	取數	8	4	2	1									乙勝
	1X				餘數	8	4	2	1									
15	32	4	0	15	取數	8	4	2	1	8	9							乙勝
	2X				餘數	24	20	18	17	9	0							

模型#2　T=3(N+1) & 4(N+1)　R=0

實例						#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13	結果
N	T	X	R	R'		甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	
5	18	1	0	4	取數	4	5	2	1	3	1	2							甲勝
	3X				餘數	14	9	7	6	3	2	0							
5	24	1	0	3	取數	3	1	3	1	2	5	2	3	4					甲勝
	4X				餘數	21	20	17	16	14	9	7	4	0					
6	21	0	0	5	取數	2	5	1	6	3	4								乙勝
	3X				餘數	19	14	13	7	4	0								
6	28	0	0	4	取數	4	3	5	2	6	4	2	1						乙勝
	4X				餘數	24	21	16	14	8	4	2	1						
7	24	3	0	6	取數	7	1	7	1	4	2	1							甲勝
	3X				餘數	17	16	9	8	4	2	1							
7	32	3	0	5	取數	6	1	4	2	1	2	7	1	4	2	1			甲勝
	4X				餘數	26	25	21	19	18	16	9	8	4	2	1			
11	36	2	0	10	取數	1	11	5	7	6	3	1	2						乙勝
	3X				餘數	35	24	19	12	6	3	2	0						
11	48	2	0	9	取數	9	3	6	3	1	2	5	7	4	8				乙勝
	4X				餘數	39	36	30	27	26	24	19	12	8	0				
15	48	4	0	14	取數	8	4	2	1	8	4	2	3	8	4	2	1		乙勝
	3X				餘數	40	36	34	33	25	21	19	16	8	4	2	1		
15	64	4	0	13	取數	13	3	1	15	2	14	3	13						乙勝
	4X				餘數	51	48	47	32	30	16	13	0						

模型#3　　R≠0

實例						#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	結果
N	T	X	R	R'		甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	
5	7	1	1	0	取數	1	3	1	2									乙勝
	1X				餘數	6	3	2	0									
5	25	1	1	4	取數	4	5	2	1	3	1	2	4	3				甲勝
	4X				餘數	21	16	14	13	10	9	7	3	0				
5	22	1	4	1	取數	1	5	2	1	6	1	3	2	1				甲勝
	4X				餘數	21	16	14	13	7	6	3	1	0				
6	8	0	1	0	取數	1	6	1										甲勝
	1X				餘數	7	1	0										
6	29	0	1	5	取數	1	6	1	5	2	4	3	1	6				甲勝
	4X				餘數	28	22	21	16	14	10	7	6	0				
6	25	0	4	1	取數	4	1	6	2	5	3	4						甲勝
	4X				餘數	21	20	14	12	7	4	0						
7	9	3	1	0	取數	1	4	2	1									乙勝
	1X				餘數	8	4	2	1	1								
7	33	3	1	6	取數	7	1	4	2	1	2	7	1	4	2	1		甲勝
	4X				餘數	26	25	21	19	18	16	9	8	4	2	1		
7	28	3	4	1	取數	2	1	4	2	1	2	7	1	4	2	1		甲勝
	4X				餘數	26	25	21	19	18	16	9	8	4	2	1		
11	13	2	1	0	取數	1	6	3	2	1								甲勝
	1X				餘數	12	6	3	1	0								
11	49	2	1	10	取數	1	11	1	6	3	2	1	8	4	5	7		甲勝
	4X				餘數	48	37	36	30	27	25	24	16	12	7	0		
11	40	2	4	1	取數	4	11	1	2	10	6	3	2	1				甲勝
	3X				餘數	36	25	24	22	12	6	3	1	0				
15	17	4	1	0	取數	1	6	10										甲勝
	1X				餘數	16	10	0										
15	65	4	1	14	取數	1	12	4	8	4	2	1	2	15	7	9		甲勝
	4X				餘數	64	52	48	40	36	34	33	31	16	9	0		
15	52	4	4	1	取數	4	12	4	10	6	4	12						甲勝
	3X				餘數	48	36	32	22	16	12	0						

五、結論與生活應用

◈ 在解說獲勝的技巧之前，有一個重要的概念要先提出。

搶數遊戲勝利的關鍵是化整為零。將 T 除以(N+1)，可視為 T 被分割成數個(N+1)，如此，我們只要估算要完成 N+1 的步數是偶數步或奇數步即可預測先手或後手會是贏家，其餘的就是如何執行。

例如: 當 N=6, T=14, N+1=7, T÷(N+1)=2…0

「7」是奇數，代表只要兩步就能完成 (如右圖所示)， 若甲為先手，乙為後手，乙只要確定甲+乙=7，以此方法連續兩回合即可輕鬆獲勝。

前手	後手
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

從模擬對戰的數據中，我們的假設得到了佐證，在特定的條件下，勝負的確是固定在某一方。依照遊戲條件，我們可以推導出勝方如下表，接下來我們會針對不同條件說明獲勝技巧。

X=奇數	$N+1 = 2^x \cdot K$ 例: 6, 10…	T不是 N+2的倍數	甲勝	條件一
		T是 N+2的倍數	乙勝	條件二
	$N+1 = 2^x$ 例:8, 32…	$T\neq a(2N+3)+b(N+2)$ ab為正整數或0, $a+b\geq1$	甲勝	條件三
		$T= a(2N+3)+b(N+2)$ ab為正整數或0, $a+b\geq1$	乙勝	條件四
X=0	R=0		乙勝	條件五
	R≠0		甲勝	條件六
X=偶數	R=0		乙勝	條件七
	R≠0		甲勝	條件八

■ 條件一 ➡ 甲必勝，甲第一手出(N+1)/2，乙接下來只有兩種出法:
第一種，乙平分餘數，那麼甲就接著再平分下去直到最後。之後則稱此為「平分法」
第二種，乙出「(餘數)/2」之外的數，那麼甲只要出餘數即可。

■ 條件二 ➡ 乙必勝，甲只有兩種做法
第一種，甲第一手出「1」，乙重複條件一中甲使用的技巧。
第二種，甲第一手出 1 之外的數，乙確保「甲+乙=N+2」就可獲勝。

■ 條件三 ➡ 甲必勝，甲使用 (2N+3)來當作分割 T 的單位，得餘數 r，若 r < N+2，甲第一手出 r，見例 A。若 r > N+2，甲第一手出 r – (N+2)，見例 B。
當 r < N+2 時，滿足的單位順序是 N+1 和 N+2 交互輪流直到最後。
當 r > N+2 時，先滿足一個 N+2，接下來又是 N+1 和 N+2 交互輪流直到最後。
乙則有三種做法:
第一種: 見例 A，出 1，甲要滿足的是 N+1，所以，甲出 7，滿足 N+1 即可。
若甲要滿足的是 N+2，見例 B，乙同樣出 1，則採用「平分法」。
第二種: 乙出 4，若甲要滿足的是 N+1，採「平分法」，要滿足的是 N+2，甲出 5。
第三種: 乙出 1 與 4 之外的數，甲只要確保「乙+甲=N+1」或「乙+甲=N+2」即可。

** 特別注意一點，若採用「平方法」導致最後有個餘數 1，則留到下一輪滿足。以例 B 為例，#5 時甲出 1 導致乙接下來無法出 1，於是#6 乙出 2 可視為乙出 1(2-1=1)，所以#甲出 7 即可。

實例	N	T		#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	結果
				甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	
例 A	7	24	取數	7	1	7	1	4	2	1						甲勝
		3X	餘數	17	16	9	8	4	2	1	1	1	1	1	1	
例 B	7	28	取數	2	1	4	2	1	2	7	2	7				甲勝
		4X	餘數	26	25	21	19	18	16	9	7	0				

■ 條件四 ➡ 乙必勝。做法同「條件三」甲的對策。

當 r =0 時，滿足的單位順序是 N+1 和 N+2 交互輪流直到最後。

當 r = N+2 時，先滿足一個 N+2，接下來又是 N+1 和 N+2 交互輪流直到最後。

** 注意: 當餘數 ＜2N 且為偶數時，採用「平分法」會更快結束遊戲。見例 C，#6。

實例	N	T		#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	結果
				甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲	乙	
例C	7	26	取數	7	2	4	2	1	5	3	2					乙勝
		3X	餘數	19	17	13	11	10	5	2	0					
例D	7	34	取數	1	7	1	4	2	1	2	7	5	4			乙勝
		4X	餘數	33	26	25	21	19	18	16	9	4	0			

■ 條件五和條件七，乙必勝。乙確保「甲+乙=N+1」，「平分法」也是乙獲勝。

■ 條件六和條件八，甲必勝，甲的第一手出 R，之後做法就同條件五和七中乙的做法。

學會這些技巧並加以融會貫通，相信以後不論是搶數遊戲或是滅鼠先鋒，咱們一定是笑傲這些遊戲的「遊戲王」。做完這個研究，赫然發現很多的遊戲看似公平，可其實對於懂數學的人來說，勝負早在一開始就已經決定了。所以把遊戲當成娛樂就好，千萬不能參與打賭或賭博，否則最後一定會後悔莫及。

參考資料

- 在正五邊形上跳舞...搶 20 的遊戲

  http://pisa.math.ntnu.edu.tw/attachments/article/1090/41%20saymathsgame.pdf
- 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會 作品說明書

  https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/51/pdf/040416.pdf
- 搶數字遊戲

  http://www.mathland.idv.tw/fun/grab.htm。
- 2022 全國科學探究競賽 國中組數學科 「因錯陽差倍水戰」

  https://sciexplore2022.colife.org.tw/work.php?t=B0016