

2024 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】
普高組 成果報告表單

題目名稱： DAMN 風扇~電風扇扇葉傾角大小與有效風場間的關係
一、摘要 本作品在探討「當傾角(即風扇與風扇頭延伸方向的夾角)改變時，有效風場的形狀會如何改變」。研究分成理論預測與實驗。在理論預測中，我們計算理想情況中空氣分子與扇葉的碰撞情形，計算不同傾角大小與風場的形狀的關係；而在實驗中，我們實際做出不同傾角大小風扇，並測量各風扇的有效風場大小。最後，我們比較兩者的實驗結果，得出不同傾角大小與有效風場形狀的關係。
二、探究題目與動機 在炎炎夏日裡，電風扇是我們生活中不可或缺的必需品。但在吹電風扇時，我們常有距離的限制—如果距離太遠就吹不到風；多人一起吹電風扇時，又無法照顧周全，只能轉動電風扇頭，無法提供持續且大範圍的風。經常能看到在有關電風扇的研究中，都在討論單一扇葉的偏轉角度對風速或風場的影響，而我們好奇電風扇的扇葉為什麼都設計在對轉軸垂直的平面旋轉，因此我們想探討電風扇扇葉傾角(扇葉平面與風扇頭延伸直線的夾角)大小與風場間的關係。
三、探究目的與假設 <ol style="list-style-type: none">1. 傾角愈大，有效風場愈寬、愈短；傾角愈小，有效風場愈窄、愈長。2. 有效風場體積大小相等，不隨傾角大小改變。3. 求出傾角大小與有效風場形狀的關係式。4. 求出有效風場長寬最大的傾角大小。
四、探究方法與驗證步驟
名詞定義 一、有效風場：可被測量的風場大小。實驗中以測風標測量。從風扇開始轉動後 10 秒內測風標出現搖晃，即在有效風場內；若只有墊片搖晃則視為無效。所有滿足條件的點即形成有效風場。 二、扇葉：電風扇葉，材質為紙杯。 三、傾角：扇葉平面與風扇頭延伸直線的夾角。 四、偏轉角：空氣分子射出方向與風扇頭延伸直線的夾角。 五、測風標：為 20 公分的棉線往下加掛墊片組成，加墊片的原因是為了讓棉線不受空氣擾動而影響實驗結果，為測量有效風場的標準物。 六、近點:能使測風標擺動的最遠點。

七、遠點:無法使測風標擺動的最近點。

八、低點:測量到使測風標擺動的最低點。

九、高點:無法使測風標擺動的最低點。

實驗原理

為了確定有效風場的形狀，我們假設有效風場的形狀是上下左右對稱的立體空間，於是我們只需要測量「在轉軸延伸的直線上有效風場的最遠處跟扇葉頭的距離」和「有效風場最高處的直線斜率」，就能夠決定有效風場的形狀。

實驗過程

我們分成理論預測與實驗來測量出有效風場的形狀：

實驗一：用理論的方式預測風場的大小

為了驗證實驗結果的準確性，我們將實驗理想化，預測不同傾角的扇葉所吹出的風場形狀。首先，我們假設氣體為理想氣體，與扇葉行完全彈性碰撞，且空氣之間無阻力。而因為空氣阻力對測量風場最遠處的影響較大，故我們只計算風場最高處。

首先是單一扇葉偏轉角度，我們以扇葉與扇葉頭寬度計算得到偏轉角度最大為 $\sin^{-1}(\frac{1.47}{3}) = 29.34^\circ$ ，約為 30° ，我們便設定單一扇葉偏轉角度為 30° 。設扇葉的傾角大小為 θ ，並將扇葉視為一個平面，放置在空間直角座標中。我們將風扇平面設在 xz 平面，則

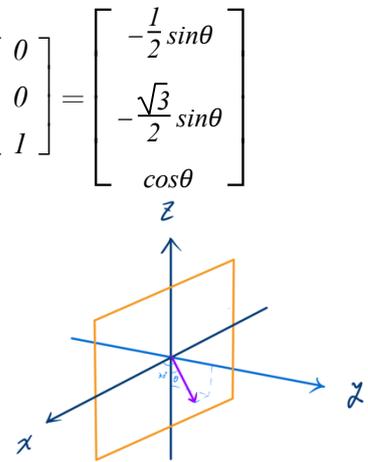
$$\text{扇葉法向量 } \vec{n} : \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) & 0 \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sin\theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{扇葉所在平面} : x \cdot \sin\theta + \sqrt{3}y \cdot \sin\theta - 2z \cdot \cos\theta = 0$$

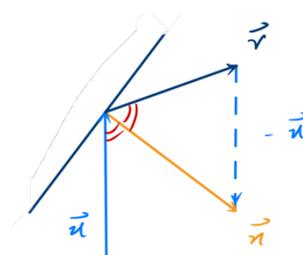
$$\text{入射空氣分子} : \vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \angle(\vec{n}, \vec{u}) = \cos^{-1}(\frac{\sin\theta}{2})$$

$$\text{令出射角 } \vec{v}, -\vec{u} + \vec{v} = -\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot 2|\vec{u}| \cos(\cos^{-1}(\frac{\sin\theta}{2})) = -\vec{n} \cdot \sin\theta$$

$$\text{則 } \vec{v} = -\vec{n} \cdot \sin\theta + \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sin^2\theta - 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta \\ -\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix},$$



圖（一）扇葉平面

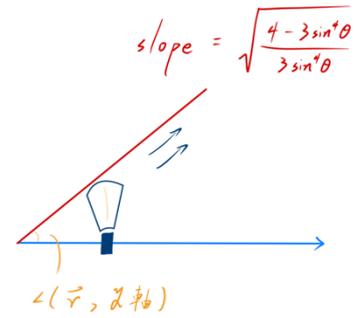


圖（二）空氣分子反射

$$\text{偏折角 } \angle(\vec{v}, y \text{ 軸}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2\theta\right),$$

$$\tan(\angle(\vec{v}, y \text{ 軸})) = \frac{\sqrt{4-3\sin^4\theta}}{\sqrt{3}\sin^2\theta} = \sqrt{\frac{4-3\sin^4\theta}{3\sin^4\theta}}$$

代入 $\theta = 60^\circ、70^\circ、80^\circ、90^\circ、100^\circ、110^\circ、120^\circ$ ，即得出風場最高處的直線斜率。



圖(三) 偏轉角

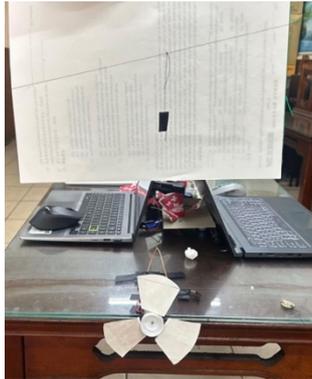
實驗二：實際用測風標測量出有效風場大小

實驗器材

(1)馬達(2)扇葉 (3)熱融膠、膠帶(4)卷尺(5)棉線(6)墊片(7)固定架

實驗原理

將一條長棉線橫掛在兩支架上，固定棉線一端作為固定端，而另一端可調整高度作自由端。將測風標掛於長棉線上，並分別在距離風扇頭 5、15 及 25 公分處，找到高點及低點，並記錄高度，最後再用回歸直線求出斜率。而測量有效風場最遠處時也同樣找到遠點及近點，並記錄與風扇頭間的距離。進而推出各角度間有效風場的體積。



圖(四) 測風標



圖(五) 實驗過程

有效風場最高處實驗流程：

1. 確認無風環境且棉線不擺動、測風標與風扇頭對齊
2. 開啟風扇電源，觀察測風標在 10 秒內有無擺動情形
3. 關閉風扇電源，測量墊片與風扇頭水平面的垂直距離
4. 依據 2.的實驗結果，移動固定架之自由端使測風標上升或下降
5. 重複 1~4，直到最高點和最低點差距小於 5 公分(降低誤差值)

有效風場最遠處實驗流程：

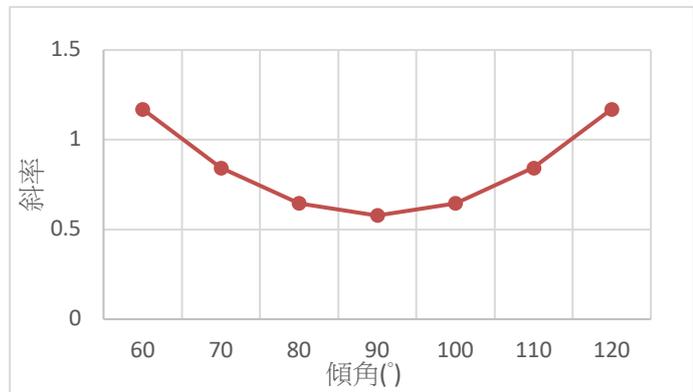
1. 確認無風環境且棉線不擺動、測風標與風扇頭對齊
2. 開啟風扇電源，觀察測風標在 10 秒內有無擺動情形
3. 關閉風扇電源，測量測風標與風扇頭的距離
4. 依據 2.的實驗結果，移動固定架使其靠近或遠離風扇
5. 重複 1~4，直到最近點和最遠點差距小於 10 公分(降低誤差值)

實驗結果：

我們將實驗一中的斜率的記錄如下表，並繪製成圖：

表（一）傾角與斜率

傾角 (°)	斜率
60	1.171
70	0.843
80	0.646
90	0.577
100	0.646
110	0.843
120	1.171

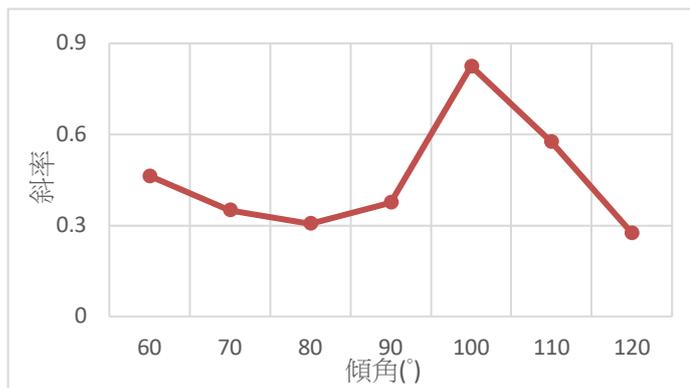


圖（六）傾角與斜率

我們將實驗二中最高處斜率記錄如下表，並繪製成圖：

表（二）傾角與最高處斜率

傾角 (°)	斜率
60	0.463
70	0.350
80	0.306
90	0.375
100	0.825
110	0.575
120	0.275

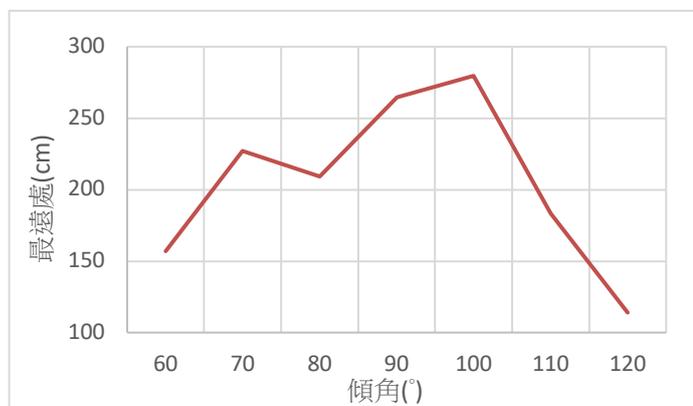


圖（七）傾角與最高處斜率

我們將實驗二中最遠處與風扇的距離記錄如下表，再遠點與近點的距離平均，作為風扇的最遠處並繪製成圖：

表（三）傾角與最遠處距離

傾角 (°)	最遠處(cm)
60	157
70	227
80	209
90	264
100	280
110	184
120	114



圖（八）傾角與最遠處距離

我們將實驗二中最高處的高度記錄如下表，再高點與低點的距離平均，作為風扇的最高處並繪製成圖：

表 (四) 傾角與最高處

傾角 (°)	5cm	15cm	25cm
60	23.6	25.6	32.9
70	21.1	25.6	28.1
80	23.1	23.1	29.2
90	27.1	34.4	34.6
100	25.1	40.4	41.6
110	28.0	34.9	39.5
120	31.7	35.1	37.5

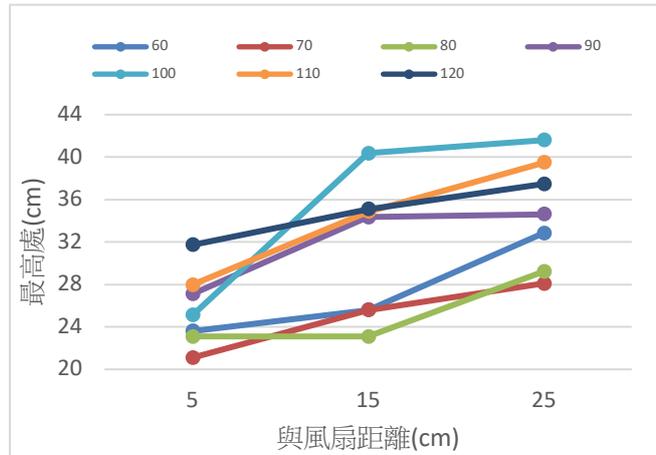


圖 (九) 傾角與最高處

討論：

假設一：傾角愈大，有效風場愈寬、愈短；傾角愈小，有效風場愈窄、愈長。

實驗結果不支持假設。在有效風場的寬度部分為傾角 100° 的扇葉最寬、120° 的扇葉最窄，與假設不同；而從圖 (六)、圖 (七) 也可得知有效風場的最高處斜率不論是理論值還是實驗結果，皆無相關性。

假設二：有效風場體積大小相等，不隨傾角大小改變。

我們利用上述測量的數據，可以求出不同傾角大小的有效風場體積為

$$\frac{\pi d}{3} (r^2 + r d \tan \varphi + d^2 \tan^2 \varphi) + \frac{\pi}{3} \left(\frac{r}{\sin \varphi} + \frac{d}{\cos \varphi} \right)^3 (1 - \cos \varphi)^2 (2 + \cos \varphi)$$

其中 d 為風場最遠處， r 為風扇面半徑。

將數據代入得到

表 (五) 傾角與有效風場體積

傾角 (°)	體積 (m ³)
60	1.11
70	1.81
80	1.09
90	3.26
100	23.92
110	2.88
120	0.16

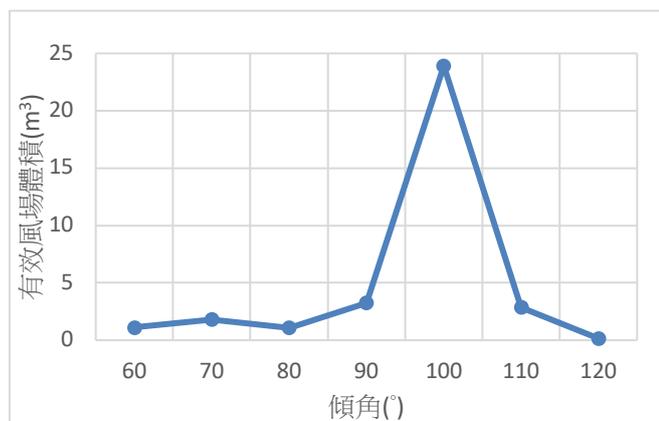


圖 (十) 傾角與有效風場體積

由上圖的結果可以發現，實驗結果不支持假設。傾角 100° 的扇葉吹出之有效風場的長度及寬度皆為最大，即其有效風場體積比其他角度的大，不符合假設所說體積相等的情形。若排除 100° 扇葉的實驗結果，可以觀察到剩餘的體積大小都介在 $0\sim 3\text{ m}^3$ ，或許值得我們思考是否 100° 的扇葉是偏差值。

目的二：求出傾角大小與有效風場形狀的關係式。

因實驗結果並無明顯對稱或相關性，故我們很難找出傾角大小與有效風場形狀的關係式。

目的三：求出有效風場長寬最大的傾角大小。

由實驗結果可知有效風場長寬最大的傾角為 100° 。

五、結論與生活應用

根據我們的實驗結果，我們得知風扇扇葉的傾角對於風場大小有著極大的影響。

我們的實驗結果顯示出傾角 100° 的扇葉吹風的效果最佳，在所有種類，其在距離風扇頭 5、15 及 25 公分處測出有效風場的最高處最高，且最遠處離風扇頭的距離最遠，代表傾角 100° 的扇葉能夠將風有效地傳遞到較遠的距離，同時也覆蓋了較廣的範圍，有效風場體積也是最大。傾角 120° 的扇葉的最遠處相對其他組離風扇頭最近，代表其較無法吹到遠處。

而傾角 80° 的扇葉吹出的有效風場範圍相對於其他組則較窄。我們推測 80° 的扇葉做得精確度不高，可能是因為器材本身的誤差亦或者是我們的判斷方式(單從棉線擺動的狀況判定是否在有效風場內)本身誤差就極大。從圖表中可發現數據與其他組的趨勢稍微不同，這是我們需要改善的地方。

我們可以利用這次的實驗結果設計可依照使用者的需求調整傾角大小的電風扇，使能源被最大限度地利用，如此一來便可達到節能減碳的效果；倘若在有限的空間中，也能使每一個人都吹到風，由此一來便可發揮最大效益。

參考資料

1. 第四十八屆全國中小學科展作品--電風扇扇葉角度的秘密
2. 第三十八屆全國中小學科展作品--空穴來風—風扇流場之探討