2024 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

普高組 成果報告表單

題目名稱：走捷徑的骰子

一、摘要

本研究探討正六面體骰子在 m*n 棋盤中以走捷徑方式滾動後，其朝上面的點數。我們先找出使骰子「復位」的最小循環單位，並依此開發出 C++程式以簡化計算。接著透過觀察與歸納找出路徑與點數的關係。結果顯示 1 點與 6 點的路徑數互補，且可用對方的形式表示；2,3,4,5 點的路徑數則大致相同，僅會因為初始擺放位置而有所差異。

二、探究題目與動機

在玩大富翁時，時常會出現骰子落下後還會在桌上翻滾幾圈的情況，因此我們想探討骰子翻滾對於點數的影響。高一排列組合中有「走捷徑問題」，我們希望將骰子滾轉與走捷徑結合，尋找骰子走捷徑的點數規律。

三、探究目的與假設

1. 探討骰子在滾轉後出現復位的最小循環單位。
2. 撰寫演算法，開發計算骰子滾轉後的最終朝上點數的 C++程式，加速資料蒐集。
3. 探討骰子在任意$m \times n$棋盤中，各點數朝上的總路徑$S_i(m+n)$之規律。

四、探究方法與驗證步驟

一、研究流程

1. 製作正六面體骰子，並繪製棋盤。

2. 定義各種骰子各面點數及其相對位置。

3. 將骰子在棋盤上以各種擺放方式滾轉，觀察其朝上點數。

4. 開發 **C++程式**加速資料蒐集。

5. 將統整的資料繪製成**類巴斯卡三角形**之結構，以利觀察。

二、研究結果

（１）骰子復位的最小循環單位

在$m \times n$棋盤方格中，最終朝上點數出現的次數受骰子朝前的點數影響。左圖為骰子在$m \leq 4$且$n \leq 4$的$m \times n$棋盤中滾轉時，第一次復位的位置。格內的數字為可造成復位於該格的路徑總數（如圖 1）。

1		3		2
			2	
				3
起點				1

圖 1：$m \leq 4$且$n \leq 4$之一次復位情況

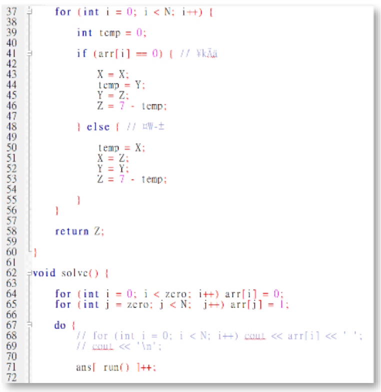
持續重複上述步驟，可以得到骰子二次復位的情況。新增的數字為骰子在$m \leq 8$且$n \leq 8$的$m \times n$棋盤中滾轉時，第二次復位的位置。格內的數字為可造成復位於該格的路徑總數（如圖 2）。

1		4		3				
			3		5			
				4		8		
							5	
1		3		2		4		3
			2				3	
				3				4
起點				1				1

圖 2：$m \leq 8$且$n \leq 8$之二次復位情況

（2）開發演算法與 C++程式

根據復位的規律，我們成功開發出可以加速蒐集資料的程式。使用者只要輸入往右、往前的字串，就可以得到最終朝上點數（如圖 3）。



```
    for (int i = 0; i < N; i++) {

        int temp = 0;

        if (arr[i] == 0) { // ¥kÃä

            X = X;
            temp = Y;
            Y = Z;
            Z = 7 - temp;

        } else { // ¤W-±

            temp = X;
            X = Z;
            Y = Y;
            Z = 7 - temp;

        }
    }

    return Z;

}

void solve() {

    for (int i = 0; i < zero; i++) arr[i] = 0;
    for (int j = zero; j < N;  j++) arr[j] = 1;

    do {
        // for (int i = 0; i < N; i++) cout << arr[i] << ' ';
        // cout << '\n';

        ans[ run() ]++;
```

圖 3：程式碼截圖

（3）各點數朝上的總路徑規律

左圖為$1 \leq (m+n) \leq 17$時，$S_1(m+n)$ 與$S_6(m+n)$的函數值。**我們發現 1 點與 6 點的路徑總數可以互相以對方的形式表示。**

用1點表示6點：$\boldsymbol{2\sum_{k=1}^{k=m+n} S_1(k) = S_6(m+n+2) - 8}$

用6點表示1點：$\boldsymbol{2\sum_{k=1}^{k=m+n} S_6(k) = S_1(m+n+2)}$

由於 2、3、4、5 朝上的路徑數相同，我們只放$i = 2$之表格（如圖 4）。

m+n	a_j
	2
1	2
2	2
3	6
4	10
5	22
6	42
7	86
8	170
9	342
10	682
11	1366
12	2730
13	5462
14	10922
15	21846
16	43690
17	87382

圖 4：當$1 \leq (m+n) \leq 17$時，$S_2(m+n)$的函數值

2,3,4,5 點的總路徑數：

$$\boldsymbol{S_2(m+n)=\begin{cases}\dfrac{2^{(m+n+1)}+2}{3}, m+n\ is\ odd\\ \dfrac{2^{(m+n+1)}-2}{3}, m+n\ is\ even\end{cases}}$$

$$\boldsymbol{S_2(m+n)=\frac{2^{(m+n+1)}+2\times(-1)^{(m+n+1)}}{3}}$$

三、討論

我們發現，固定$m+n$值，$f_k(m+n)$可能可以找出相對應的類巴斯卡三角形之性質（如圖 5、6）。

m	n	ways	123					
			1	2	3	4	5	6
16	0		1	0	0	0	0	0
15	1		0	4	8	0	4	0
14	2		20	12	16	12	16	44
13	3		44	114	84	140	110	68
12	4		412	276	226	292	242	372
11	5		588	828	838	786	796	532
10	6		1594	1186	1238	1170	1222	1598
9	7		1574	2055	2048	2104	2097	1562
8	8		2546	1990	1931	1990	1931	2482
7	9		1574	2104	2097	2055	2048	1562
6	10		1594	1170	1222	1186	1238	1598
5	11		588	786	796	828	838	532
4	12		412	292	242	276	226	372
3	13		44	140	110	114	84	68
2	14		20	12	16	12	16	44
1	15		0	0	4	4	8	0
0	16		1	0	0	0	0	0
			11012	10969	10876	10969	10876	10834
17	0		0	0	0	1	0	0
16	1		8	5	0	0	4	0
15	2		20	12	52	20	16	16
14	3		100	134	84	56	154	152
13	4		336	320	456	552	310	406
12	5		1080	1240	758	880	1168	1062
11	6		2034	1774	2436	2380	1754	1998
10	7		3270	3649	2800	2744	3695	3290
9	8		4028	3564	4530	4650	3493	4045
8	9		4028	4650	3493	3564	4530	4045
7	10		3270	2744	3695	3649	2800	3290
6	11		2034	2380	1754	1774	2436	1998
5	12		1080	880	1168	1240	758	1062
4	13		336	552	310	320	456	406
3	14		100	56	154	134	84	152
2	15		20	20	16	12	52	16
1	16		8	0	4	5	0	0
0	17		0	1	0	0	0	0
			21752	21981	21710	21981	21710	21938

m	n	154					
		1	2	3	4	5	6
16	0	1	0	0	0	0	0
15	1	0	4	0	8	4	0
14	2	20	16	12	16	12	44
13	3	44	110	140	84	114	68
12	4	412	242	292	226	276	372
11	5	588	796	786	838	828	532
10	6	1594	1222	1170	1238	1186	1598
9	7	1574	2097	2104	2048	2055	1562
8	8	2546	1931	1990	1931	1990	2482
7	9	1574	2048	2055	2097	2104	1562
6	10	1594	1238	1186	1222	1170	1598
5	11	588	838	828	796	786	532
4	12	412	226	276	242	292	372
3	13	44	84	114	110	140	68
2	14	20	16	12	16	12	44
1	15	0	8	4	4	0	0
0	16	1	0	0	0	0	0
		11012	10876	10969	10876	10969	10834
17	0	0	0	1	0	0	0
16	1	8	4	0	0	5	0
15	2	20	16	20	52	12	16
14	3	100	154	56	84	134	152
13	4	336	310	552	456	320	406
12	5	1080	1168	880	758	1240	1062
11	6	2034	1754	2380	2436	1774	1998
10	7	3270	3695	2744	2800	3649	3290
9	8	4028	3493	4650	4530	3564	4045
8	9	4028	4530	3564	3493	4650	4045
7	10	3270	2800	3649	3695	2744	3290
6	11	2034	2436	1774	1754	2380	1998
5	12	1080	758	1240	1168	880	1062
4	13	336	456	320	310	552	406
3	14	100	84	134	154	56	152
2	15	20	52	12	16	20	16
1	16	8	0	5	4	0	0
0	17	0	0	0	0	1	0
		21752	21710	21981	21710	21981	21938

m	n	142					
		1	2	3	4	5	6
16	0	1	0	0	0	0	0
15	1	0	8	4	4	0	0
14	2	20	16	16	12	12	44
13	3	44	84	110	114	140	68
12	4	412	226	242	276	292	372
11	5	588	838	796	828	786	532
10	6	1594	1238	1222	1186	1170	1598
9	7	1574	2048	2097	2055	2104	1562
8	8	2546	1931	1931	1990	1990	2482
7	9	1574	2097	2048	2104	2055	1562
6	10	1594	1222	1238	1170	1186	1598
5	11	588	796	838	786	828	532
4	12	412	242	226	292	276	372
3	13	44	110	84	140	114	68
2	14	20	16	16	12	12	44
1	15	0	4	8	0	4	0
0	16	1	0	0	0	0	0
		11012	10876	10876	10969	10969	10834
17	0	0	0	0	0	1	0
16	1	8	0	4	5	0	0
15	2	20	52	16	12	20	16
14	3	100	84	154	134	56	152
13	4	336	456	310	320	552	406
12	5	1080	758	1168	1240	880	1062
11	6	2034	2436	1754	1774	2380	1998
10	7	3270	2800	3695	3649	2744	3290
9	8	4028	4530	3493	3564	4650	4045
8	9	4028	3493	4530	4650	3564	4045
7	10	3270	3695	2800	2744	3649	3290
6	11	2034	1754	2436	2380	1774	1998
5	12	1080	1168	758	880	1240	1062
4	13	336	310	456	552	320	406
3	14	100	154	84	56	134	152
2	15	20	16	52	20	12	16
1	16	8	4	0	0	5	0
0	17	0	0	0	1	0	0
		21752	21710	21710	21981	21981	21938

m	n	135					
		1	2	3	4	5	6
16	0	1	0	0	0	0	0
15	1	0	0	4	4	8	0
14	2	20	12	12	16	16	44
13	3	44	140	114	110	84	68
12	4	412	292	276	242	226	372
11	5	588	786	828	796	838	532
10	6	1594	1170	1186	1222	1238	1598
9	7	1574	2104	2055	2097	2048	1562
8	8	2546	1990	1990	1931	1931	2482
7	9	1574	2055	2104	2048	2097	1562
6	10	1594	1186	1170	1238	1222	1598
5	11	588	828	786	838	796	532
4	12	412	276	292	226	242	372
3	13	44	114	140	84	110	68
2	14	20	12	12	16	16	44
1	15	0	4	0	8	4	0
0	16	1	0	0	0	0	0
		11012	10969	10969	10876	10876	10834
17	0	0	1	0	0	0	0
16	1	8	0	5	4	0	0
15	2	20	20	12	16	52	16
14	3	100	56	134	154	84	152
13	4	336	552	320	310	456	406
12	5	1080	880	1240	1168	758	1062
11	6	2034	2380	1774	1754	2436	1998
10	7	3270	2744	3649	3695	2800	3290
9	8	4028	4650	3564	3493	4530	4045
8	9	4028	3564	4650	4530	3493	4045
7	10	3270	3649	2744	2800	3695	3290
6	11	2034	1774	2380	2436	1754	1998
5	12	1080	1240	880	758	1168	1062
4	13	336	320	552	456	310	406
3	14	100	134	56	84	154	152
2	15	20	12	20	52	16	16
1	16	8	5	0	0	4	0
0	17	0	0	1	0	0	0
		21752	21981	21981	21710	21710	21938

m	n	1	2	3	4	5	6	
16	0	4	0	0	0	0	0	4
15	1	0	16	16	16	16	0	64
14	2	80	56	56	56	56	176	480
13	3	176	448	448	448	448	272	2240
12	4	1648	1036	1036	1036	1036	1488	7280
11	5	2352	3248	3248	3248	3248	2128	17472
10	6	6376	4816	4816	4816	4816	6392	32032
9	7	6296	8304	8304	8304	8304	6248	45760
8	8	10184	7842	7842	7842	7842	9928	51480
7	9	6296	8304	8304	8304	8304	6248	45760
6	10	6376	4816	4816	4816	4816	6392	32032
5	11	2352	3248	3248	3248	3248	2128	17472
4	12	1648	1036	1036	1036	1036	1488	7280
3	13	176	448	448	448	448	272	2240
2	14	80	56	56	56	56	176	480
1	15	0	16	16	16	16	0	64
0	16	4	0	0	0	0	0	4
		44048	43690	43690	43690	43690	43336	262144
17	0	0	1	1	1	1	0	4
16	1	32	9	9	9	9	0	68
15	2	80	100	100	100	100	64	544
14	3	400	428	428	428	428	608	2720
13	4	1344	1638	1638	1638	1638	1624	9520
12	5	4320	4046	4046	4046	4046	4248	24752
11	6	8136	8344	8344	8344	8344	7992	49504
10	7	13080	12888	12888	12888	12888	13160	77792
9	8	16112	16237	16237	16237	16237	16180	97240
8	9	16112	16237	16237	16237	16237	16180	97240
7	10	13080	12888	12888	12888	12888	13160	77792
6	11	8136	8344	8344	8344	8344	7992	49504
5	12	4320	4046	4046	4046	4046	4248	24752
4	13	1344	1638	1638	1638	1638	1624	9520
3	14	400	428	428	428	428	608	2720
2	15	80	100	100	100	100	64	544
1	16	32	9	9	9	9	0	68
0	17	0	1	1	1	1	0	4
		87008	87382	87382	87382	87382	87752	524288

圖 5：我們目前跑的最大數$m+n=17$時的情況

$$
\begin{array}{c}
0 \quad 0 \\
4 \quad 0 \quad 4 \\
0 \quad 4 \quad 4 \quad 0 \\
4 \quad 0 \quad 16 \quad 0 \quad 4 \\
0 \quad 8 \quad 12 \quad 12 \quad 8 \quad 0 \\
4 \quad 0 \quad 36 \quad 8 \quad 36 \quad 0 \quad 4 \\
0 \quad 12 \quad 24 \quad 48 \quad 48 \quad 24 \quad 12 \quad 0 \\
4 \quad 0 \quad 64 \quad 32 \quad 144 \quad 32 \quad 64 \quad 0 \quad 4 \\
0 \quad 16 \quad 40 \quad 120 \quad 164 \quad 164 \quad 120 \quad 40 \quad 16 \quad 0 \\
4 \quad 0 \quad 100 \quad 80 \quad 400 \quad 200 \quad 400 \quad 80 \quad 100 \quad 0 \quad 4
\end{array}
$$

圖 6：點數$1+6$之類巴斯卡三角形

五、結論與生活應用

一、結論

1. $\boldsymbol{2\sum_{k=1}^{k=m+n} S_6\,(k) = S_1(m+n+2)}$
2. $\boldsymbol{S_{2,3,4,5}(m+n) = \dfrac{2^{(m+n+1)}+2\times(-1)^{(m+n+1)}}{3}}$

二、未來展望

1. 給定任意正整數m、n與k，求最終朝上點數。
2. 找出相對應的類巴斯卡三角形之性質。
3. 利用數學歸納法，嚴謹證明其規律。

參考資料

1. 張庭瑋、蘇靖洋、許登翔（2020）。翻滾的骰子。臺北市第 8 屆捷運盃專題發表會作品。
2. 結城浩（2013）。數學女孩：隨機演算法。新北市：世茂出版。