

2024 年【科學探究競賽-這樣教我就懂】

普高組 成果報告表單

題目名稱：公平物資分配-怎樣分配才合理

一、摘要

日常生活中經常出現需要「分配」物品的時候。例如：競標、災害來臨時的必需品分配等等，各種大大小小的事情都與「分配」有關，因此本研究團隊期待透過參與分配物品的人中，依照每個人對於物品的價值估計，達到所謂「公平」分配的目標。

為了達到「公平分配」的目標，本團隊將秉持以下兩個核心目標：(1) 獲得物品者的效用值總和最大。(2) 獲得物品者的效用值總和之差距最小。其中「效用值」指的是每個人對於單一物品的估價佔自己對於總體 30 項物品的估價總和的佔比。本團隊提出了三種不同的分配模型，分別為：Model 1 排序法；Model 2 WTPZ 標準分數法；Model 3 WTPN 歸一化法。經過三種模型的計算後，得到 Model 3 優於 Model 2 優於 Model 1，歸一化法為最佳。

二、探究題目與動機

在日常的生活中時常出現需要分配物品的問題，因此本團隊的研究目標是能夠提供一套公平且客觀的模型進行物品的「分配」，期待該模型可以應用於災害來臨時的物資分配問題，將生活必需品合理且有效率的分配給受災者。

本團隊將根據 2024 IMMC 國際數學建模挑戰賽大中華賽區冬季賽 E 題的資料作為例子，如表 (一)，依照這些數據進行分析，並在建模的過程中進行優化和修正。

表(一)貨物清單及五位研究人員的估價

序號	貨物	愛麗絲的估價, acr.	鮑勃的估價, acr.	查理的估價, acr.	大衛的估價, acr.	愛琳的估價, acr.
1	便攜式工具箱	30	70	60	45	45
2	生存食品包裝盒	20	22	25	23	15
3	一段絲綢布料	110	70	50	90	80
4	計算機記憶體條	50	100	50	90	20
5	電子溫度計(實驗室等級)	200	310	200	320	300
6	寵物狗-蝴蝶混種(處於冷凍狀態)	180	50	-50	0	200
7	餐具套裝	7	6	5	5	6
8	太空服	200	700	450	550	550
9	太空蝴蝶結	3	10	3	4	1
10	捲起式300英寸平板電視	75	50	90	50	40
11	餐桌餐具套裝	4	4	1	1	3
12	夏季鞋子	15	5	7	5	10
13	全息甲板訪問鑰匙卡	10	110	110	30	40
14	稀有紙質書籍包裝盒	120	80	90	150	170
15	芽苣菜-南瓜種子	5	3	15	30	100
16	掃描誇克顯微鏡	200	800	600	1100	1000
17	網路視頻傳輸設備	150	50	300	100	100
18	針織毛衣	20	20	20	20	20
19	可調諧波長投影儀	5	8	7	20	35
20	阿爾巴尼亞鍵盤	9	10	15	2	5
21	可摺疊物業(高稅)	50	75	-30	-50	-40
22	一瓶Melange香料	50	25	95	100	50
23	自動雞計數器	20	75	20	70	90
24	古董 iPhone 17 (良好狀態)	200	300	340	125	150
25	激光劍(損壞)	50	100	220	110	70
26	高中生糾錯工具	200	250	150	400	500
27	無可疑機械零件	3	30	5	7	5
28	可疑的機械零件	3	45	50	70	45
29	“我們曾被稱為BTS”回憶錄(書籍)	70	40	100	10	120
30	盧克的出生證明	30	5	25	10	5

三、探究目的與假設

- 1、 依照參與人員對於貨物的喜歡程度將所有貨物分配給他們，並且評估這樣的貨物分配方法是否公平。
- 2、 建立數學模型並評估這樣的貨物分配方法是否公平。

四、探究方法與驗證步驟

(一) 研究過程

1、 研究目的—

由表 (二) 可以看到，我們以 Alice 和 Bob 採用最簡化的模型依照「價高者得」的方式進行貨物分配，也就是估價較高者即視為對於貨物的喜歡程度較高。

接著，本研究將每人獲得的貨物佔自己對於全部貨物估價總和百分比視為其「效用值 (utility)」。舉例而言，Alice 獲得了貨物序號 3，其估價 110 arc. 佔全部貨物估價總和 2089 arc. 的 5.27% (即 $u_3 = 5.27%$)，將兩人獲得的貨物效用值相加計算效用值總和，得到 Alice 的獲得貨物效用值總和為 40.02%；Bob 的獲得貨物效用值總和為 88.78%。

由於兩人的效用值總和差距為 48.76%，有著相當大的差距，因此本研究將透過後續的三種數學模型，使得獲得貨物者的效用值總和最大及效用值總和之差距最小，來達到「公平分配」的原則。

2、 研究目的二

(1) Model 1：排序法

首先，每一位研究人員對於貨物的估價，各自由大到小進行排序並給予其排序分數，估價最高的貨物給 30 分，估價次高的貨品給 29 分，以此類推直到估價最低者給 1 分，然而，當估價相同，計算其排序分數時，此模型將視估價相同的貨物數量平均分配分數給每一個估價相同的貨物。例如：Alice 在貨物序號 5, 8, 16, 24, 26 中估價都是相同且為最高，因此該五項

表 (二) Alice 和 Bob 之貨物分配表、獲得之貨物價值所佔百分比

序號	貨物	Alice	Bob
1	便攜式工具箱	30	70
2	生存食品包裝盒	20	22
3	一段絲綢布料	110	70
4	計算機記憶體條	50	100
5	電子溫度計 (實驗室等級)	200	310
6	寵物狗-蝴蝶混種 (處於冷凍狀態)	180	50
7	餐具套裝	7	6
8	太空服	200	700
9	太空蝴蝶結	3	10
10	捲起式300英寸平板電視	75	50
11	餐桌餐具套裝	4	4
12	夏季鞋子	15	5
13	全息甲板訪問鑰匙卡	10	110
14	稀有紙質書籍包裝盒	120	80
15	茅膏菜-南瓜種子	5	3
16	掃描誇克顯微鏡	200	800
17	網路視頻傳輸設備	150	50
18	針織毛衣	20	20
19	可調諧波長投影儀	5	8
20	阿爾巴尼亞鍵盤	9	10
21	可摺疊物業(高稅)	50	75
22	一瓶Melange香料	50	25
23	自動雞計數器	20	75
24	古董 iPhone 17 (良好狀態)	200	300
25	激光劍(損壞)	50	100
26	高中生糾錯工具	200	250
27	無可疑機械零件	3	30
28	可疑的機械零件	3	45
29	"我們曾被稱為BTS"回憶錄 (書籍)	70	40
30	盧克的出生證明	30	5
獲得的貨物價值		836	3039
全部總和		2089	3423
獲得的貨物價值所佔百分比		40.02%	88.78%

貨物的排序分數將平分 30, 29, 28, 27, 26 五個分數，所以將此五項貨物的排序分數都給定為 28 分。

接著是橫向排序，橫向排序也是依照每一位研究人員對於貨物的估價進行排序並給予其排序分數，給予貨物估價最高的研究人員給 5 分，次高者給 4 分，以此類推直到估價最低者給 1 分，當遇到估價相同時，也是將視估價相同的貨物數量平均分配分數給每一個估價相同的貨物。

本團隊透過 Model 1 (排序法)計算了

$$u^i = \max_{1 \leq j \leq 5} (\text{order}_{i \in \{1, 2, \dots, 30\}}(j) + \text{order}_{j \in \{1, 2, \dots, 5\}}(i))$$

，針對第 i 項貨物，取縱向

和橫向排序分數，分數最高者得到該項貨物，再計算獲得該項貨品的研究人員效用值，計算每一個研究人員獲得貨物的效用值總和分別為 7.23% ,

31.99% , 22.49% , 51.33% , 32.53% 。將上述的效用值加總為 145.58% ，即

$$f_1 = \sum_{i=1}^{30} u^i = 145.58\%$$

，接著為了評估每一位研究人員獲得貨物的效用值總和之差距，本團隊針對每位研究人員獲得貨物的效用值總和計算其平均為

$$\frac{7.23\% + 31.99\% + 22.49\% + 51.33\% + 32.53\%}{5} = 29.12\%$$

，再透過每一位研究人員獲得貨物的效用值與平均值計算其「效用離均差」，得到

$$f_2 = \left| \sum u_{i,j} - \frac{\sum_{j=1}^5 u_{i,j}}{5} \right| = |7.23\% - 29.12\%| + |31.99\% - 29.12\%| + |22.49\% - 29.12\%| + |51.33\% - 29.12\%| + |32.53\% - 29.12\%| = 57\%$$

然而透過上述方法有以下幾個缺點帶排除：(1) 縱向和橫向排序值總和相同時，採估價高者得，這樣的作法雖不是沒有道理，但估價高者不一定佔自己總體估價總和百分比高，意即效用值不一定比較高。(2) 縱向排序分數因為項目較多，最大值為 30 分，但橫向排序分數因為人數只有 5 人，最大值為 5 分，如此一來將縱向與橫向排序分數直接相加，將會有橫向分數佔比較少的疑慮。為解決上述缺點，本研究將橫向排序分數進行了倍率的調整，在倍率的調整下本團隊發現，將橫向排序分數調整至 3 倍以後，兩個目標函

數計算出來的值都已確定，也就是每位研究人員獲得貨物的效用值都已不再改變。為了讓縱向與橫向排序分數的最大值相同（感受上有相同比重的效果），本團隊決定將橫向排序總和之倍率調整為 6 倍，並製成表（三）。

相較於表（三），即橫向排序分數倍率調整前的 $f_1 = 145.58\%$ ， $f_2 = 57\%$ 。顯然透過橫向排序分數倍率調整後的表（三）可以看到兩個目標函數都達成更好的效果，分別為 $f_1 = 151.58\%$ ， $f_2 = 43\%$ 。

表（三）五位研究人員之效用值總和、效用離均差（倍率調整後）

序號	Alice			Bob			Charlie			David			Erin			
	估價	縱向排序	橫向排序	估價	縱向排序	橫向排序	估價	縱向排序	橫向排序	估價	縱向排序	橫向排序	估價	縱向排序	橫向排序	
1	30	14.5	6	70	18.5	30	60	18	24	45	16	15	45	15.5	15	
2	20	12	12	22	10	18	25	13.5	30	23	13	24	37	15	9	
3	110	22	30	70	18.5	12	30.5	50	16	6	22	90	20.5	24	44.5	
4	50	17.5	15	100	23.5	30	50	16	15	31	90	20.5	24	44.5	20	
5	200	28	9	310	28	24	52	200	25	9	34	320	27	30	57	
6	180	25	24	49	50	16	18	34	-50	1	6	7	0	2	12	
7	7	7	30	6	5	21	26	5	5.5	9	14.5	5	6.5	9	15.5	
8	200	28	15	43	700	29	30	59	450	29	15	44	550	29	6	
9	3	2	24	26	10	7.5	15	22.5	3	4	30	34	4	5	15	
10	75	21	24	45	50	16	15	31	90	19.5	30	49.5	50	17	15	
11	4	4	27	31	4	2	27	29	1	3	9	12	1	3	9	
12	15	10	30	40	5	3.5	9	12.5	7	7.5	18	25.5	5	6.5	9	
13	10	9	6	15	110	25	27	52	110	23	27	50	30	14.5	12	
14	120	23	18	41	80	22	6	28	90	19.5	12	31.5	150	26	24	
15	5	5.5	12	17.5	3	1	6	7	15	9.5	18	27.5	30	14.5	24	
16	200	28	6	34	800	30	18	48	600	30	12	42	1100	30	30	
17	150	24	24	48	50	16	6	22	300	27	30	57	100	22.5	15	
18	20	12	18	30	20	9	18	27	20	11.5	18	29.5	20	11.5	18	
19	5	5.5	6	11.5	8	6	18	24	7	7.5	12	19.5	20	11.5	24	
20	9	8	18	26	10	7.5	24	31.5	15	9.5	30	39.5	2	4	6	
21	50	17.5	24	41.5	75	20.5	30	50.5	-30	2	18	20	-50	1	6	
22	50	17.5	15	32.5	25	11	6	17	95	21	24	45	100	22.5	30	
23	20	12	9	21	75	20.5	24	44.5	20	11.5	9	20.5	70	18.5	18	
24	200	28	18	46	300	27	24	51	340	28	30	58	125	25	6	
25	50	17.5	6	23.5	100	23.5	18	41.5	220	26	30	56	110	24	24	
26	200	28	12	40	250	26	18	44	150	24	6	30	400	28	24	
27	3	2	6	8	30	12	30	42	5	5.5	15	20.5	7	8	24	
28	3	2	6	8	45	14	15	29	50	16	24	40	70	18.5	30	
29	70	20	18	38	40	13	12	25	100	22	24	46	10	9.5	6	
30	30	14.5	30	44.5	5	3.5	9	12.5	25	13.5	24	37.5	10	9.5	18	
效用值			8.90%				31.70%				32.85%			45.60%		32.53%
效用值總和	151.58%															
效用離均差	43%															

(2) Model 2. : WTPZ 法

本團隊採用了「願付價格 (Willingness to pay)」作為取名的依據。在本模型中，縱向分數採用研究人員對於每一個貨物的估價（願付價格）計算其效用值（單位為百分比）；橫向分數則是利用同一個貨物間，5 位研究人員對該貨物估價的標準分數（Z 分數）進行計算。其 Z 分數的計算方式為：

$$Z_i(j) = \frac{x_i - \sum_{j=1}^5 x_j}{\sigma_i} \cdot 5$$

其中 σ_i 為第 i 項貨物的估價標準差。

在計算完縱向分數與橫向分數後，由於兩者之單位不同，直接進行相加或進行任何線性組合的計算都欠缺解釋力，本團隊將兩者分數相乘，相乘的主因為縱向分數與橫向分數都與其喜歡程度成正比，相乘後也必然與喜歡程度成正比，所以本模型將採用縱向分數與橫向分數相乘後的最大者，用以決定是哪一位研究人員獲得該項貨物。但由於貨物序號 20 中，5 位研究人員

估價皆為 20 arc.，所以會導致計算出的 Z 分數的數值皆為 0，這種情況發生時，將會使得該貨物的橫向分數與縱向分數相乘後皆為 0，將無法決定該項貨物會由哪一位研究人員獲得。為了避免上述的情況，計算時將 Z 分數平移 +1，整體的計算邏輯為 $u^i = \max_{1 \leq j \leq 5} (u_{ij} \times (WTPZ + 1))$ ，其製表如下表

(四)：

表 (四) Model 2 模型計算結果

序號	橫向 Z 分數					效用值					(WTPZ+1)*(效用值*100)					
	Alice	Bob	Charlie	David	Erin	Alice	Bob	Charlie	David	Erin	Alice	Bob	Charlie	David	Erin	
1	-1.45095	1.45095	0.72548	-0.36274	-0.36274	1.44%	2.04%	1.98%	1.29%	1.20%	-0.64761	5.01217	3.42470	0.82239	0.76778	
2	-0.29361	0.29361	1.17444	0.58722	-1.76166	0.96%	0.64%	0.83%	0.66%	0.40%	0.67629	0.83142	1.79825	1.04692	-0.30589	
3	1.50000	-0.50000	-1.50000	0.50000	0.00000	5.27%	2.04%	1.65%	2.58%	2.14%	13.16419	1.02249	-0.82699	3.87152	2.14190	
4	-0.41015	1.29881	-0.41015	0.95702	-1.43553	2.39%	2.92%	1.65%	2.58%	0.54%	1.41180	6.71578	0.97560	5.05110	-0.23322	
5	-1.21640	0.81093	-1.21640	0.99523	0.62663	9.57%	9.06%	6.62%	9.18%	8.03%	-2.07180	16.40048	-1.43169	18.31011	13.06530	
6	1.05574	-0.26394	-1.27907	-0.77150	1.25877	8.62%	1.46%	-1.65%	0.00%	5.35%	17.71341	1.07517	0.46158	0.00000	12.09515	
7	1.60357	0.26726	-1.06904	-1.06904	0.26726	0.34%	0.18%	0.17%	0.14%	0.16%	0.87243	0.22213	-0.01142	-0.00990	0.20358	
8	-1.75195	1.26886	-0.24165	0.36247	0.36247	9.57%	20.45%	14.89%	15.77%	14.73%	-7.19914	46.39796	11.28870	21.49006	20.06215	
9	-0.39223	1.89579	-0.39223	-0.06537	-1.04595	0.14%	2.99%	0.10%	0.11%	0.03%	0.08728	8.84598	0.06031	0.10721	-0.00123	
10	0.75483	-0.59308	1.56358	-0.59308	-1.13224	3.59%	1.46%	2.98%	1.43%	1.07%	6.30025	7.63223	0.58348	0.58348	-0.14162	
11	1.03209	1.03209	-1.17954	-1.17954	0.29488	0.19%	0.12%	0.03%	0.03%	0.08%	0.38910	0.23746	-0.00594	-0.00515	0.10401	
12	1.74900	0.90100	-0.37100	-0.90100	0.42400	0.72%	0.15%	0.23%	0.14%	0.27%	1.97391	0.01446	0.14565	0.01420	0.38126	
13	-1.19183	1.19183	1.19183	-0.71510	-0.47673	0.48%	3.21%	3.64%	0.86%	1.07%	-0.09183	7.04357	7.97556	0.24511	0.56040	
14	-0.05832	-1.22474	-0.93314	0.81650	1.39971	5.74%	2.34%	2.98%	4.30%	4.55%	5.40936	-0.52525	0.19905	7.81402	10.92237	
15	-0.71126	-0.76683	-0.43343	-0.01667	1.92819	0.24%	0.09%	0.50%	0.86%	2.68%	0.06911	0.02044	0.28113	0.84600	7.83987	
16	-1.68750	0.18750	-0.43750	1.12500	0.81250	9.57%	23.37%	19.85%	31.55%	26.77%	-6.58210	27.75343	11.16441	67.03470	48.52744	
17	0.11625	1.04623	1.85996	-0.46499	-0.46499	7.18%	1.46%	9.92%	2.87%	2.68%	8.01520	-0.06753	28.38200	1.53430	1.43242	
18	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.96%	0.58%	0.66%	0.57%	0.54%	0.95740	0.58428	0.66159	0.57356	0.53548	
19	-0.88527	-0.61969	-0.70821	-0.44263	1.77054	0.24%	0.23%	0.23%	0.57%	0.94%	0.02746	0.08888	0.06757	0.82743	2.59622	
20	0.17997	0.40493	1.52973	-1.39476	-0.71987	0.43%	0.29%	0.50%	0.06%	0.13%	0.50836	0.41044	1.25524	-0.02264	0.03750	
21	0.95656	1.44461	-0.60517	-0.99561	-0.80039	2.39%	2.19%	-0.99%	-1.43%	-1.07%	4.68301	5.55629	-0.39183	-0.00629	-0.21377	
22	-0.48478	-1.35046	1.07344	1.24658	-0.48478	2.39%	0.73%	3.14%	2.87%	1.34%	1.23317	-0.25596	6.51594	6.44273	0.68972	
23	-1.19349	0.68199	-1.19349	0.51150	1.19349	0.96%	2.19%	0.66%	2.01%	2.41%	-0.18525	3.68534	-0.12801	3.03427	5.28552	
24	-0.27459	0.91928	1.39682	-1.16999	-0.87152	9.57%	8.76%	11.25%	3.58%	4.02%	6.94505	16.82103	26.95729	-0.60937	0.51598	
25	-1.01710	-0.16952	1.86467	0.00000	-0.67806	2.39%	2.92%	7.28%	3.15%	1.87%	-0.04093	2.42618	20.84775	3.15457	0.60337	
26	-0.76696	-0.38348	-1.15045	0.76696	1.53393	9.57%	7.30%	4.96%	11.47%	13.39%	2.23112	4.50278	-0.74653	20.26911	33.92142	
27	-0.69447	1.98419	-0.49605	-0.29763	-0.49605	0.14%	0.88%	0.17%	0.20%	0.13%	0.04388	2.61542	0.08335	0.14100	0.06746	
28	-1.81308	0.10988	0.33881	1.25451	0.10988	0.14%	1.31%	1.65%	2.01%	1.20%	-0.11677	1.45909	2.21437	4.52583	1.33720	
29	0.05038	-0.70531	0.80607	-1.46100	1.30986	3.35%	1.17%	3.31%	0.29%	3.21%	3.51970	0.34436	5.97443	-0.13221	7.42124	
30	1.43019	-0.95346	0.95346	-0.47673	-0.95346	1.44%	0.15%	0.83%	0.29%	0.13%	3.48998	0.00680	1.61550	0.15006	0.00623	
						效用值	17.52%	28.78%	39.53%	42.73%					27.18%	
						效用值總和	155.73%									
						效用離均差	40%									

從上表 (四) 可以看出，Model 2 的兩個目標函數值 $f_1 = 155.73\%$ ，

$f_2 = 40\%$ 。相比於 Model 1 的兩個目標函數值 $f_1 = 151.58\%$ ， $f_2 = 43\%$ 皆有明顯的提升效果。

(3) Model 3. : WTPN 法

本團隊採用了「歸一化 (Normalization)」作為取名的依據。在此模型

中，縱向分數採用的計算方式與 Model 2 的縱向分數相同；橫向分數則是利用同一個貨物間，5 位研究人員對該貨物估價的歸一化數值進行計算。其歸

一化數值的計算方式為： $N_i(j) = \frac{x_i - \min(x_i)}{\max(x_i) - \min(x_i)}$ ，其中 $\min(x_i)$ 為第 i

項貨物的估價最小值， $\max(x_i)$ 則為第 i 項貨物的估價最大值。

與 Model 2 相同的是，由於縱向與橫向分數單位的不同，直接進行相加

或進行任何線性組合的計算都欠缺解釋力，本團隊將兩者分數相乘，相乘的

主因也與 Model 2 相同，將兩者相乘後必然與喜歡程度成正比，所以本模型

將採用縱向分數與橫向分數相乘後的最大者，用以決定是哪一位研究人員獲

得該項貨物。會與 Model 2 面臨一樣的問題相同，貨物序號 20 中，5 位研究人員估價皆為 20 arc，計算其歸一化數值將使得每個儲存格的數值皆為 0，為了避免無法決定該項貨物會由哪一位研究人員獲得，計算時將歸一化數值平移 +1，整體的計算邏輯為 $u^i = \max_{1 \leq j \leq 5} (u_{ij} \times (WTPN + 1))$ ，其製表如下表 (五)：

表 (五) Model 3 模型計算結果

序號	效用值				WTPN+1				(WTPN+1)*(效用值*100)						
	Alice	Bob	Charlie	David	Erin	Alice	Bob	Charlie	David	Erin	Alice	Bob	Charlie	David	Erin
1	1.44%	2.04%	1.98%	1.29%	1.20%	0	1	0.75	0.375	0.375	1.43609	4.08998	3.47337	1.77445	1.65663
2	0.96%	0.64%	0.83%	0.66%	0.40%	0.5	0.7	1	0.8	0	1.43609	1.09261	1.65399	1.87227	0.40161
3	5.27%	2.04%	1.65%	2.58%	2.14%	1	0.33333	0	0.66667	0.5	10.5314	2.72665	1.65399	4.30169	3.21285
4	2.39%	2.92%	1.65%	2.58%	0.54%	0.375	1	0.375	0.875	0	3.29105	5.84283	2.27423	4.8394	0.53548
5	9.57%	9.06%	6.62%	9.18%	8.03%	0	0.91667	0	1	0.83333	9.57396	17.3581	6.61594	18.3539	14.7256
6	8.62%	1.46%	-1.65%	0.00%	5.35%	0.9	0.4	0	0.2	1	16.5438	2.04499	-1.654	0	10.7095
7	0.34%	0.18%	0.17%	0.14%	0.16%	1	0.5	0	0	0.5	0.67018	0.26293	0.1654	0.14339	0.24096
8	9.57%	20.45%	14.89%	15.77%	14.73%	0	1	0.5	0.7	0.7	9.57396	40.8998	22.3288	26.8139	25.0335
9	0.14%	0.29%	0.10%	0.11%	0.03%	0.22222222	1	0.22222	0.33333	0	0.17552	0.58428	0.12129	0.15295	0.02677
10	3.59%	1.46%	2.98%	1.43%	1.07%	0.7	0.2	1	0.2	0	6.1034	1.75285	5.95435	1.72068	1.07095
11	0.19%	0.12%	0.03%	0.03%	0.08%	1	1	0	0	0.66667	0.38296	0.23371	0.03308	0.02868	0.13387
12	0.72%	0.15%	0.23%	0.14%	0.27%	1	0	0.2	0	0.5	1.43609	0.14607	0.27787	0.14339	0.40161
13	0.48%	3.21%	3.64%	0.86%	1.07%	0	1	1	0.2	0.3	0.4787	6.42711	7.27754	1.03241	1.39224
14	5.74%	2.34%	2.98%	4.30%	4.55%	0.44444444	0	0.11111	0.77778	1	8.29743	2.33713	3.30797	7.64745	9.10308
15	0.24%	0.09%	0.50%	0.86%	2.68%	0.020618557	0	0.12371	0.27835	1	0.24428	0.08764	0.55758	1.09981	5.35475
16	9.57%	23.37%	19.85%	31.55%	26.77%	0	0.66667	0	0.44444	1	0.88889	9.57396	38.9522	28.6691	63.0915
17	7.18%	1.46%	9.92%	2.87%	2.68%	0.4	0	1	0.2	0.2	10.0527	1.46071	19.8478	3.44135	3.21285
18	0.96%	0.58%	0.66%	0.57%	0.54%	0	0	0	0	0	0.9574	0.58428	0.66159	0.57356	0.53548
19	0.24%	0.23%	0.23%	0.57%	0.94%	0	0.1	0.06667	0.5	1	0.23935	0.25708	0.247	0.86034	1.87416
20	0.43%	0.29%	0.50%	0.06%	0.13%	0.538461538	0.61538	1	0	0.23077	0.66281	0.47192	0.99239	0.05736	0.16476
21	2.39%	2.19%	-0.99%	-1.43%	-1.07%	0.8	1	0.16	0	0.08	4.30828	4.38212	-1.1512	-1.4339	-1.1566
22	2.39%	0.73%	3.14%	2.87%	1.34%	0.33333333	0	0.93333	1	0.33333	3.19132	0.73035	6.07564	5.73559	1.78492
23	0.96%	2.19%	0.66%	2.01%	2.41%	0	0.78571	0	0.71429	1	0.9574	3.91261	0.66159	3.44135	4.81928
24	9.57%	8.76%	11.25%	3.58%	4.02%	0.348837209	0.81395	1	0	0.11628	12.9137	15.8979	22.4942	3.58474	4.48305
25	2.39%	2.92%	7.28%	3.15%	1.87%	0	0.29412	1	0.35294	0.11765	2.39349	3.78065	14.5551	4.26795	2.09465
26	9.57%	7.30%	4.96%	11.47%	13.39%	0.142857143	0.28571	0	0.71429	1	10.9417	9.39026	4.96196	19.6649	26.7738
27	0.14%	0.88%	0.17%	0.20%	0.13%	0	1	0.07407	0.14815	0.07407	0.14361	1.75285	0.17765	0.23049	0.14379
28	0.14%	1.31%	1.65%	2.01%	1.20%	0	0.62687	0.70149	1	0.62687	0.14361	2.13874	2.81425	4.01491	1.96008
29	3.35%	1.17%	3.31%	0.29%	3.21%	0.545454545	0.27273	0.81818	0	1	5.17864	1.48727	6.01449	0.28678	6.4257
30	1.44%	0.15%	0.83%	0.29%	0.13%	1	0	0.8	0.2	0	2.87219	0.14607	1.48859	0.34414	0.13387
					效用值	21.11%	28.78%	36.55%	42.73%	27.18%					
					效用值總			156.35%							
					效用離均			33.49%							

從上表 (五) 可以看出，Model 3 的兩個目標函數值 $f_1 = 156.35\%$ ， $f_2 = 33.49\%$ 。相比於 Model 1 的兩個目標函數值 $f_1 = 151.58\%$ ， $f_2 = 43\%$ ；Model 2 的兩個目標函數值 $f_1 = 155.73\%$ ， $f_2 = 40\%$ 皆有明顯的提升效果。

五、結論與生活應用

經過上述三種模型的計算後，得到 Model 3 優於 Model 2 優於 Model 1，即歸一化法為最佳。

透過本研究所提出的物品公平分配模型，能夠有效地應對日常生活中各種物品分配問題，可應用在如「災害來臨」、「競標」、「遺產分配」等實際生活領域，尤其在災害來臨時，這樣的模型更是能夠發揮其價值。當災情發生時，急需的生活必需品必須合理且迅速地分配給受災者，以滿足其基本需求。

參考資料

- [1] 無作者 (無日期)。如何使用願付價格調查問卷找到最佳產品定價。【討論群組】。取自 <https://zh.surveymonkey.com/mp/willingness-to-pay/>
- [2] Original (2021 年 10 月 22 日)。如何理解歸一化 (normalization)? 【討論群組】。取自 <https://zhuatlan.zhihu.com/p/424518359>
- [3] Ryan Lu (2019 年 1 月 12 日)。Preprocessing Data：數據特徵標準化和歸一化【討論群組】。取自 <https://reurl.cc/aLZ6zX>